TRANSFORMASI LAPLACE

Oleh Dessy Irmawati

Transformasi Laplace

A. Mendefinisikan transformasi laplace
B. Menentukan fungsi dasar transformasi laplace menggunakan definisi
C. Menentukan pernyataan tertentu transformasi laplace menggunakan theorema
D. Menentukan transformasi laplace dari fungsi tertentu
E. Menentukan inverse transformasi laplace menggunakan formula
F. Menentukan inverse transformasi laplace dari pernyataan tertentu dan grafik

G. Menentukan inverse transformasi laplace menggunakan fraksi parsial dan teorema konvolusi

H. Menggunakan transformasi laplace untuk menyelesaikan masalah nilai awal dan masalah nilai batas

Pendahuluan

- Persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

- Persamaan nonhomogen

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

jika

$$f(t)=\begin{cases} t, 0\le t<1 \\ 2-t, t\ge 1 \end{cases}$$

Definisi transformasi laplace

- Diberikan f(t) dengan batas [0,∞]. Maka

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \text{ .... } 8.1$$

- Disebut transformasi laplace dari f(t). Transformasi laplace disimbolkan oleh $\mathcal{L}${f(t)} dimana $\mathcal{L}$ adalah operator

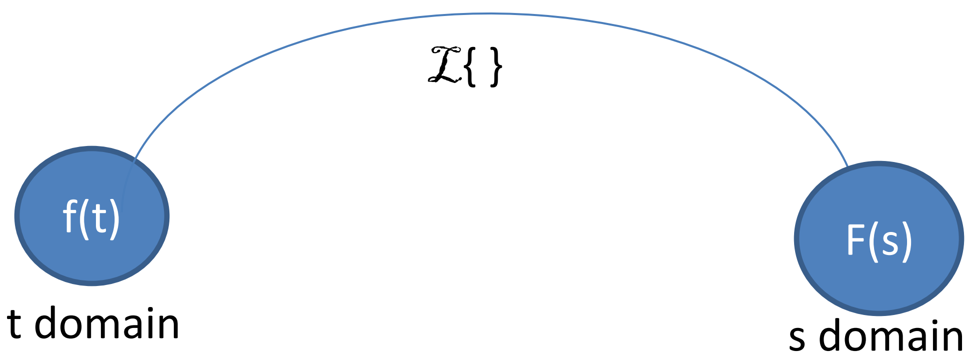
$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Jika limit ada maka integral 8.1 adalah fungsi s. Jadi integral ditandai dengan F(s) yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f(t)}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\text{-st}} f(t)dt = F(s)$$

Secara umum fungsi yang ditransformasikan menggunakan huruf kecil, sedangkan transformasi laplace nya dituliskan dengan huruf besar.

$$\mathcal{L}(f(t)\}=F(s),\ \mathcal{L}\{g(t)\}=G(s),\ \text{dan}\ \mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$$



Fungsi dasar Transformasi laplace

- Temukan transformasi laplace dari f(t) = 1

Solusi

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} dt$$

1. Ketika s<0. –st positif untuk t>0. maka

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \to \to \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^T = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} \right] = \infty$$

yang mana divergen

2. Ketika s = 0, maka

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T dt = \lim_{T\to\to\infty}\left[t\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} T = \infty$$

3. Ketika s>0, -st negatif untuk t>0. maka

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

Temukan transformasi laplace dimana a adalah konstanta dan n non negatif integer

(a) $f(t) = a$

(b) $f(t) = t$

(c) $f(t) = t^n$

(d) $f(t) = e^{at}$

solusi

(a) $$L\{a\} = \int_0^\infty e^{-st} a dt = a\int_0^\infty e^{-st} dt = a\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{a}{s}, s > 0$$

oleh karena itu

$$L\{a\} = \frac{a}{s}, s > 0$$

(b) $$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}, s > 0$$

(c)

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt$$

$$= \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt$$

$$= \left(\frac{n}{s} \right) L\{t^{n-1}\}$$

$$L\{t^n\} = \left(\frac{n}{s} \right) L\{t^{n-1}\}$$

$$L\{t^{n-1}\} = \left(\frac{n-1}{s}\right)L\{t^{n-2}\},$$

$$L\{t^{n-2}\} = \left(\frac{n-2}{s}\right)L\{t^{n-3}\}$$

$$\vdots$$

$$L\{t^{2}\} = \left(\frac{2}{s}\right)L\{t\}$$

$$L\{t\} = \left(\frac{1}{s}\right)L\{1\}$$

$$L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{t^{n}\}n-1 = \left(\frac{n}{s}\right)L\{t^{n-1}\},$$

$$= \left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n-1}{s}\right)L\{t^{n-2}\}$$

$$= \left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n-1}{s}\right)\left(\frac{n-2}{s}\right)\mathrm{L}\{\mathrm{t}^{\mathrm{n-3}}\}$$

$$\vdots$$

$$= \left(\frac{n!}{s^{n}}\right)L\{1\}$$

$$= \left(\frac{n!}{s^{n}}\right)\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L\{t^{n}\} = \left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right), n = 0,1,2,\ldots$$

$L\{f(t)\} = F(s)$		
f(t)	F(s)	Kondisi s
a	a/s	s>0
t^n, n = 0,1,2,...	$N!/s^{n+1}$	s>0
e^{at}	1/(s-a)	s>a
Sin at	$a/(s^2+a^2)$	s>0
Cos at	$s/(s^2+a^2)$	s>0
Sinh at	$a/(s^2-a^2)$	s>|a|
Cosh at	$s/s^2-a^2)$	s>|a|

soal

1) Cari L{f(t)} untuk setiap f(t):

(a) $f(t) = 2$

(b) $f(t) = e^{-2t}$

(c) $f(t) = t$

(d) $f(t) = t^3$

(e) $f(t) = \cos 4t$

(f) $f(t) = \sinh (2/3)t$

2) Gunakan tabel sebelumnya untuk menemukan transformasi laplace

(a) L{1/2}

(b) L{t^2}

(c) L{$e^{(1/2)t}$}

(d) L{cos t}

(e) L{sin 2t}

(f) L{cosh 3t}

3) Temukan transformasi laplace dari fungsi berikut:

a. $f(t) = 3t + 4$

b. $f(t) = 2\cos\omega t$

c. f(t) = cos2(t-π)

d. f(t) = sin 3t cos 3t